**MATHEMATIK** / *Die Lösung klassischer Probleme bringt neuerdings sieben Millionen Dollar*

# Hohe Summen für Genies

Einfache Beweise lernt man in der Schule, ohne große Belohnung. Wenn es knifflig wird, winken hübsche Hoch-Zahlen. Nachdenken lohnt also.

■ Autor: RENE WIEGAND

Mit Mathematik zum Millionär werden? Jetzt ist es möglich. Hundert Jahre nachdem der deutsche Mathematiker David Hilbert - er lebte von 1862 bis 1943 - in Paris auf dem zweiten Internationalen Kongress seines Faches im August 1900 in einem Vortrag "Mathematische Probleme" 23 offene Fragen formuliert hatte, sind nun sieben neue Themen als so genannte Millenniums-Probleme aufgestellt worden. Wer sie löst, wird reich, denn das neu gegründete Clay Mathematics Institute of Cambridge in Massachusetts (USA) hat extra dafür insgesamt sieben Millionen Dollar Preisgeld ausgesetzt.

Bei den Rätseln, von denen Hilbert sprach, war das noch ganz anders. Er war an den Erkenntnissen und Grundlagen der Mathematik interessiert und formulierte seine Einstellung so: "Da ist das Problem, suche die Lösung. Du kannst sie durch reines Denken finden; denn in der Mathematik gibt es kein Ignorabimus." Darin steckt eine Anspielung auf einen Ausspruch des berühmten Physiologen und Naturphilosophen Emil Du Bois-Reymond (1818-1896), der allerdings weniger optimistisch "ignoramus, ignorabimus" ("Wir wissen nicht, und wir werden nicht wissen") gesagt hatte.

Dass Hilberts Vortrag nicht vergessen ist, zeigte eine Gedenkfeier im Mai dieses Jahres im Collège de France in Paris. Der französische Forschungsminister Roger-Gérard Schwartzenberg hielt dort die offizielle Rede; anschließend gaben zwei Mathematiker die Millenniums-Probleme bekannt.

## Hilbert, der Generaldirektor

Wie bedeutend die Fragen waren und noch sind, die Hilbert formulierte, erkannten seine Kollegen, weil ihnen bei einigen die Lösung erst Jahrzehnte später gelang - und bei anderen bis heute nicht. Hilberts berühmter Kollege Hermann Minkowski, der bereits mit 19 Jahren den Preis der Pariser Akademie für Mathematik gewonnen hatte, schrieb nach dessen Referat: "Nunmehr hast Du wirklich die Mathematik in Generalpacht genommen und wird man Dich allgemein gern als Generaldirektor anerkennen."

Einen Namen machte sich Hilbert auch dadurch, dass es ihm glückte, das aus dem 17. Jahrhundert stammende Waringsche Problem zu lösen. Ebenso bedeutend waren seine Arbeiten zu den Grundlagen des Faches und zur mathematischen Physik.

Aber auch er, der bedeutendste Mathematiker zu Beginn des 20. Jahrhunderts, war nicht unfehlbar. So hatte Hilbert in seinem 13. Problem behauptet, dass es unmöglich sei, gewisse Gleichungen siebten Grades zu lösen. Doch Ende der fünfziger Jahre fanden zwei russische Wissenschaftler eine allgemeine Lösung.

Genauso überrascht war die Fachwelt, als 1970 ein erst siebzehnjähriger Russe ebenfalls eine - allerdings negative - Antwort auf eine weitere Frage gab, indem er ein Gegenbeispiel konstruierte.

## Exaktheit ist alles

Der Internationale Mathematikerkongress anno 1900 war noch eine recht beschauliche Veranstaltung von etwa 230 Mathematikern. Das letzte der nur alle vier Jahre stattfindenden Treffen - das war 1998 in Berlin - zählte schon über 4000 Teilnehmer aus aller Welt. Seit 1936 sind diese Kongresse auch der Ort, an dem die Fields-Medaille an Mathematiker unter 40 Jahren verliehen wird; sie gilt als eine Art Nobelpreis dieser Disziplin.

Hilberts Probleme waren teilweise sehr detailliert formuliert und forderten eine exakte Lösung. Manche waren mehr in Form eines Programmes ausgedrückt. Hilbert, der häufig als der letzte Universalist auf seinem Gebiet bezeichnet wird, hatte seine Fragen aus allen damals bedeutenden Gebieten der Mathematik ausgewählt.

Sein achtes Problem enthielt unter anderem die so genannte Riemannsche Vermutung. Bernhard Riemann hatte 1859 angenommen, dass fast alle Nullstellen einer speziellen komplexen Funktion - heute als Riemannsche Zeta-Funktion bezeichnet - auf einer Geraden liegen. Doch beweisen konnte er das nicht. Zwar zweifelt heute kein Mathematiker ernsthaft an der Gültigkeit der Behauptung, da man die Vermutung per Computerberechnungen für riesige Zahlenbereiche geprüft hat, dennoch kann das Problem nicht als gelöst betrachtet werden.

Riemanns berühmte Funktion hat erstaunliche Eigenschaften und macht unter anderem Aussagen über die so rätselhaften Primzahlen, also Zahlen wie 2, 3, 5, 7, 11, 13 und so weiter, die nur durch 1 und sich selbst teilbar sind. (Die 1 ist ein Spezialfall.) Weitere Fragen zu den Primzahlen - seit Euklid weiß man, dass es unendlich viele gibt - betrafen deren Verteilung. Denn je größer die Zahlen werden, desto unregelmäßiger findet sich eine Primzahl. Interessant ist auch ein weiteres von Hilbert angesprochenes, nach Christian Goldbach benanntes Problem.

## Computer an Grenzen

Goldbach (1690-1764) hatte in einem Brief an Leonhard Euler behauptet, dass sich jede gerade Zahl größer als zwei als Summe zweier Primzahlen darstellen lasse, zum Beispiel 8 = 3 + 5; 12 = 5 + 7. Mittels Computerberechnungen ist dies bis etwa 100000000 bestätigt worden; aber ein allgemeiner Beweis steht noch aus.

Wie wichtig Riemanns Hypothese für die Mathematik ist, zeigt sich daran, dass sie eines der neuen Millenniums-Probleme ist, die als bedeutend auch für die Mathematik im 21. Jahrhundert angesehen werden. Aber nicht nur so ein altes Problem wie die Zeta-Funktion wurde jetzt ausgewählt, sondern auch Fragen, die erst knapp 30 Jahre alt sind. Dazu zählt das "N versus NP"-Problem aus der Logik.

Ebenso wurde ein altes Rätsel aus der Topologie, die Poincarésche Vermutung, aufgenommen. Henri Poincaré, ein Vetter des französischen Staatspräsidenten

Raymond Poincaré und damals neben Hilbert der bedeutendste Mathematiker, formulierte ein Problem über Körper in überdimensionalen Räumen. Um dessen Lösung ringen die besten Fachleute seit etwas mehr als hundert Jahren.

## Von der Kugel zur Brezel

In der Topologie beschäftigen sich Mathematiker mit Eigenschaften von Körpern und Flächen, die erhalten bleiben oder auch nicht, wenn man diese streckt, verbiegt oder ähnlich deformiert. Nur Auseinanderreißen ist verboten. Beispielsweise interessiert der Unterschied zwischen einer Kugel, einem Fahrradschlauch und einer Brezel. Für einen Topologen ist die Antwort einfach: Es ist die Zahl der Löcher. Da die Kugel kein Loch, der Fahrradschlauch eins und die Brezel zwei hat, sind diese Körper topologisch nicht gleichwertig. Dabei spielt die Größe und Form des Loches keine Rolle.

Ist Riemanns Problem noch einfach zu formulieren, so gelingt dies bei der "Vermutung von Birch und Swinnerton-Dyer" schon nicht mehr. Selbst durchschnittliche Mathematiker werden große Schwierigkeiten haben, allein schon die Fragestellung zu verstehen - und wo das Problem liegt.

Wie sehr das mathematisch Ungelöste die Experten und auch viele Laien immer wieder beschäftigt hat, beweist die Geschichte des Großen Satzes von Fermat. Der Franzose Pierre de Fermat (1601-1665) stellte die Vermutung auf, dass es nicht möglich ist, die Gleichung x n + yn = zn zu lösen, wenn n größer als 2 ist und für die Werte für x, y und z nur ganze Zahlen wie 1, 2, 3, 4 und so weiter zugelassen sind.

Für den Exponenten n = 3 besagt Fermats Satz anschaulich Folgendes: Es ist nicht möglich, aus zwei Würfeln einen dritten Würfel herzustellen, dessen Volumen gleich der Summe der beiden Würfel beträgt, wenn man verlangt, dass alle drei Würfel eine Kantenlänge von ganzzahligem Wert besitzen sollen. Betrachtet man den Fall n = 2, so gilt Fermats Aussage nicht mehr.

Dann nämlich hat man den aus der Schule bekannten Satz des Pythagoras; und es gibt sogar unendlich viele Zahlen x, y und z, für die die Gleichung x2 + y2 = z2 gilt. Viel zitiert wird Fermats Bemerkung, dass er einen "gar wunderbaren Beweis" gefunden habe, aber der Rand des Buches "Arithmetica" des Griechen Diophantos, in dem er schrieb, nicht reiche, ihn aufzuschreiben. 1907 lobte dann die Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften den mit 100000 Mark dotierten Wolfskehl-Preis für die Lösung der berühmten Vermutung aus. Solche Preise sollten schon immer das Nachdenken anspornen.

## Prämie nach 85 Jahren

Es sollten aber noch über 85 Jahre vergehen, bis es dem Engländer Andrew Wiles 1994 gelang, das vertrackteste und eines der ältesten Probleme der Mathematik zu lösen. Eine Inflation scheinbarer Beweise setzte ein; einen Teilerfolg errang der Mathematiker Gerhard Faltings (heute Bonn).

Wiles' 1993 präsentierte Lösung erwies sich als fehlerhaft, und so machte er sich mit einem Kollegen rasch daran, die Lücke zu schließen. Schon als Schüler hatte er an dieser kniffligen Frage gesessen, aber niemanden eingeweiht. Erst bei seinem ersten Vortrag 1993 in Cambridge offenbarte er seine Ergebnisse der

Fachwelt. Man war erstaunt und begeistert zugleich. Andrew Wiles erhielt 1997 den Wolfskehl-Preis. Vom Preisgeld waren aber wegen des Wertverlustes in den zwanziger Jahren trotz Zins und Zinseszins nicht mehr als etwa 70000 Mark übrig geblieben.

Bemerkenswert ist, dass Hilbert die Fermatsche Vermutung nicht in seine Liste der wichtigen offenen Fragen aufgenommen hatte. Er hielt eine Lösung auf absehbare Zeit für schlicht nicht möglich. Wer sich nun an die Millenniums-Probleme herantraut oder einfach mehr über sie erfahren will, der kann dies auf der Internet-Seite des Clay-Instituts tun.